Chapitre 6 : Fonctions de transfert – Filtres linéaires.

Introduction

On s'intéresse ici à la réponse *fréquentielle* des réseaux linéaires par opposition à la réponse temporelle étudiée jusqu'à présent. Plan du chapitre :
§ I. : on justifie l'importance des régimes sinusoïdaux dans les réseaux linéaires par le théorème de Fourier indiquant que « *tout signal périodique peut-être décomposé en une somme de fonctions sinusoïdales* ». Ainsi connaître le comportement fréquentiel d'un système permet ensuite de connaître son comportement pour n'importe quel signal périodique (et plus seulement sinusoïdal).
§ II. : on introduit des outils mathématiques pour l'étude fréquentielle d'un système linéaire :

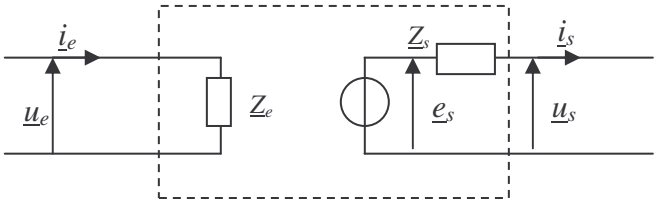
- fonction de transfert,
- diagramme de Bode.

§ III. : on utilise ces outils d'analyse dans le cas de filtres linéaires simples usuels.

I. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

■ Quadripôle

Tous les quadripôles étudiés seront linéaires et fonctionneront en RSP. On utilisera donc le formalisme complexe.



On définit l'impédance d'entrée par $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}$.

Du point de vue de la charge de sortie (dipôle branché sur la sortie), un quadripôle est modélisable par un générateur de Thévenin dont l'impédance est appelée « impédance de sortie » :
$\underline{u}_s = \underline{e}_s - \underline{Z}_s.\underline{i}_s$.

■ Fonction de transfert

On définit alors, pour un quadripôle et une charge donnés :

- la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$,
- le gain : $G(j\omega) = H(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{|\underline{S}|}{|\underline{E}|}$,
- le gain en décibel : $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega)|$,
- le déphasage entre l'entrée et la sortie : $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) = \varphi_s - \varphi_e$.

■ Représentation d'une fonction de transfert : diagramme de Bode

Le diagramme de Bode consiste à représenter en fonction de $\log\omega$ (voire $\log x$ lorsqu'on peut définir une pulsation réduite) :

- le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$,
- le déphasage $\varphi(\omega)$.

À noter que l'intervalle qui sépare ω et $10\times\omega$ est appelé une *décade*. La pente d'une courbe de gain en dB est donc exprimée en dB/déc.

■ Pulsation de coupure

La ou les pulsations de coupures ω_c sont telles que :

$$H(\omega_c)=\frac{H_{max}(\omega_c)}{\sqrt{2}} \text{ ou encore } G_{dB}(\omega_c)=G_{dB,max}(\omega_c)-20\log\sqrt{2}\approx G_{dB,max}(\omega_c)-3\,\text{dB}.$$

La bande passante est l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ tel que, $\forall\omega\in\Delta\omega, H(\omega)\geq\frac{H_{max}(\omega_c)}{\sqrt{2}}$.

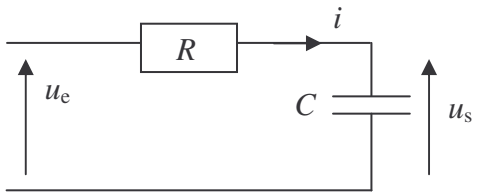
II. Filtres linéaires

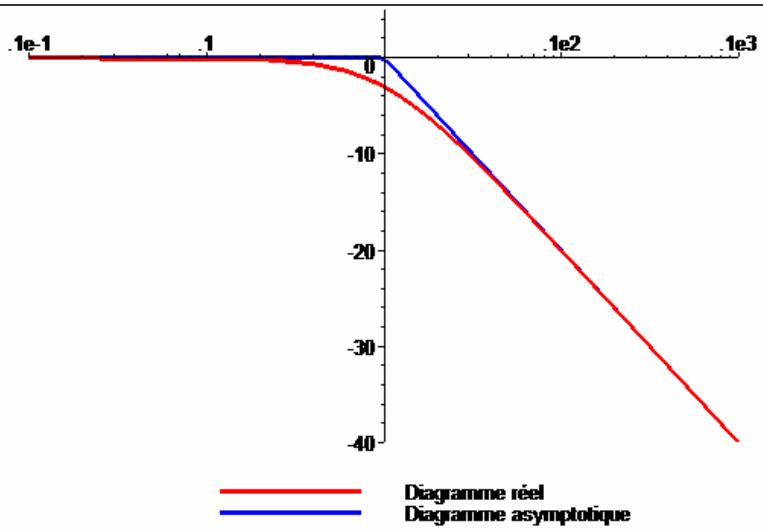
■ Généralités sur les filtres

Un filtre est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de ω. Un filtre passif (par opposition à un filtre actif) ne contient que des dipôles passifs et ne fournit pas d'énergie au signal d'entrée.

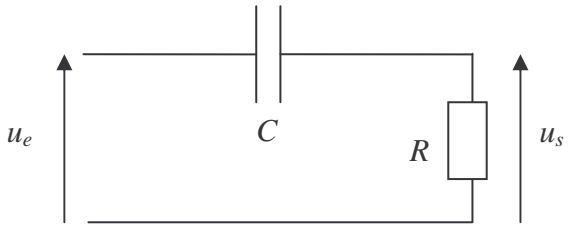
II.1. Filtres d'ordre 1

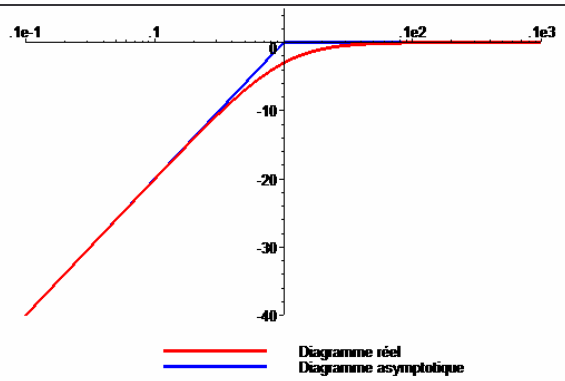
■ Filtre passe-bas d'ordre 1

Exemple de circuit réalisant un tel filtre	
Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$	$\underline{H}(j\omega)=\frac{1}{1+jRC\omega}$
Fonction de transfert $\underline{H}(jx)$	$\underline{H}(j\omega)=\frac{1}{1+jx}$
Argument de $\underline{H}(jx)$	$\varphi(x)=-\arg(1+jx)=-\arctan x$
Pulsation de coupure	$\omega_C=\omega_0=\frac{1}{RC}$
Bande passante	$[0;\omega_0]$

Allure du diagramme de Bode du gain en dB en fonction de log x	
Forme générale de la fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 1	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}=\dfrac{H_0}{1+jx}$

■ Filtre passe-haut d'ordre 1

Exemple de circuit réalisant un tel filtre	
Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$
Fonction de transfert $\underline{H}(jx)$	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{jx}{1+jx}$
Argument de $\underline{H}(jx)$	$\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arg(1+jx)=\arctan\dfrac{1}{x}$
Pulsation de coupure	$\omega_C=\omega_0=\dfrac{1}{RC}$
Bande passante	$[\omega_0;+\infty[$

Allure du diagramme de Bode du gain en dB en fonction de log x	
Forme générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1	$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = H_0 \dfrac{jx}{1+jx}$

■ Composition de filtres d'ordre 1

Très souvent une fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un produit ou d'un rapport de fonctions de transfert d'ordre 1 comme :

$\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_1 > \omega_2$ et $H_0 >$. Pour le tracé, on prendra $H_0 = 10$ et $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = 10^3$.

On pose alors : $\underline{H}_1 = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ et $\underline{H}_2 = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$. On a alors $\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{\underline{H}_2}{\underline{H}_1}$ et

$G_{dB}(\omega) = G_{dB,0} + G_{dB,2}(\omega) - G_{dB,1}(\omega) = 20\log H_0 + 20\log H_2 - 20\log H_1$

On a ici deux pulsations frontières, *il est donc impossible de définir une pulsation réduite*. Ces deux pulsations frontières délimitent 3 domaines où il faut chercher des équivalents. On peut soit utiliser le tableau proposé en cours soit faire un tracé par sommation des graphes :

$$G_{dB}(\omega) = G_{dB,0} + G_{dB,2}(\omega) - G_{dB,1}(\omega).$$

Les équivalents de chaque gain en dB, sont donnés ci-dessous :

$$\forall\omega : G_{dB,0,éq} = 20\log|H_0|$$

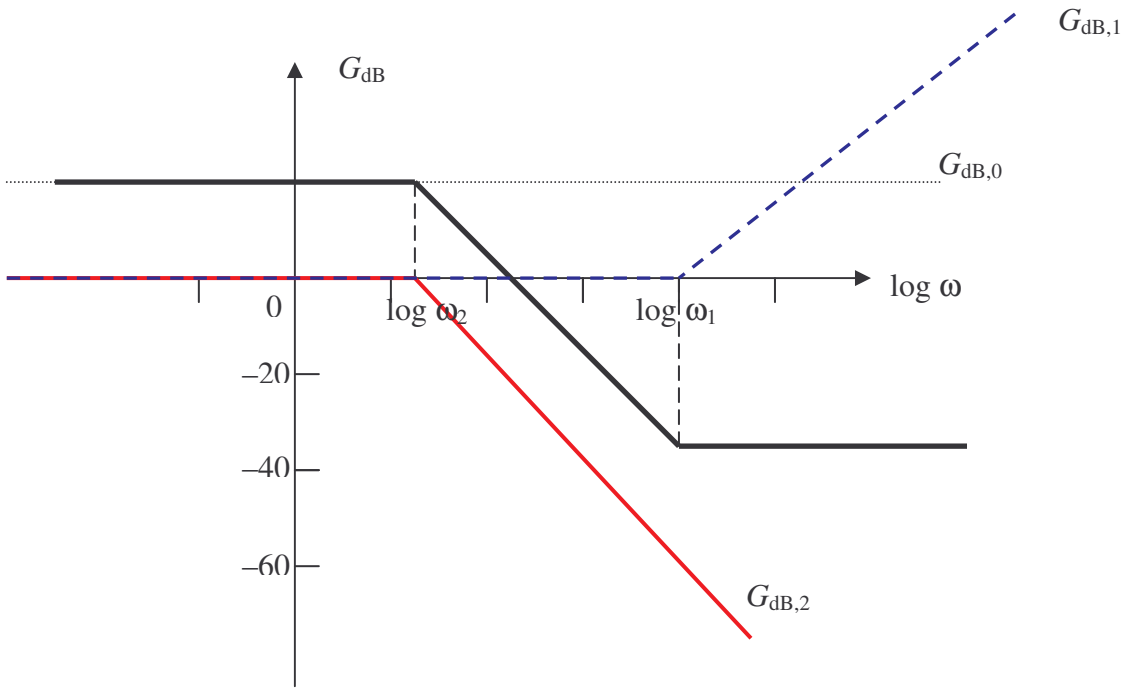
$$\omega << \omega_1 : G_{dB,1,éq} = 0$$

$$\omega >> \omega_1 : G_{dB,1,éq} = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

$$\omega << \omega_2 : G_{dB,2,éq} = 0$$

$$\omega >> \omega_2 : G_{dB,2,éq} = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

On obtient le diagramme suivant :



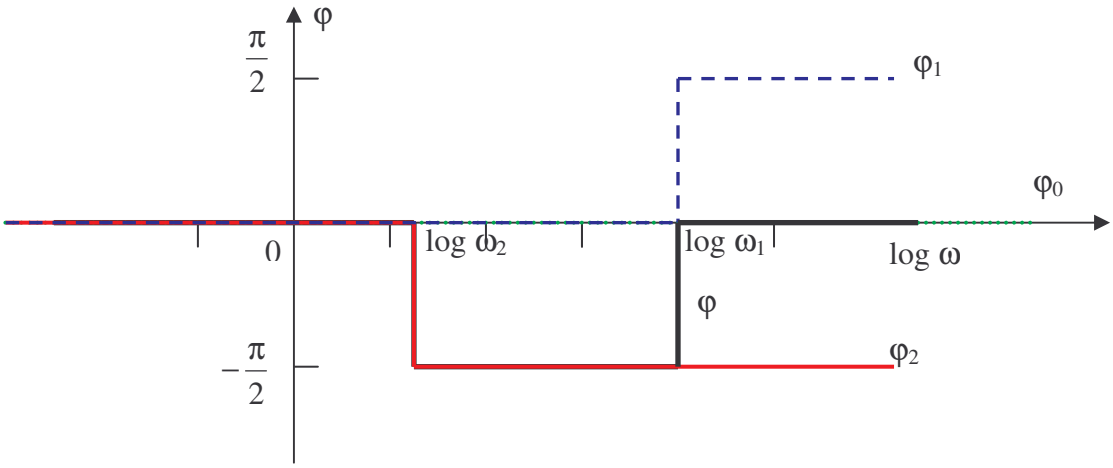
La courbe noire finale est donc la somme des courbes rouge et bleue en pointillés.

On procède de même pour le diagramme de Bode de la phase

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \arg \underline{H} \\ &= \varphi_0(\omega)+\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega) \\ &= \arg H_0 + \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\end{aligned}$$

avec

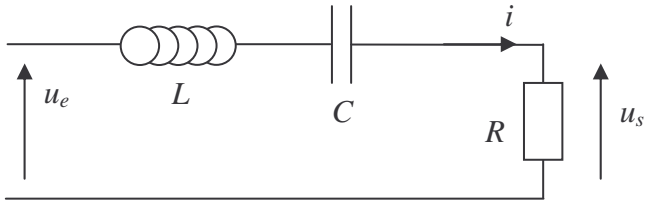
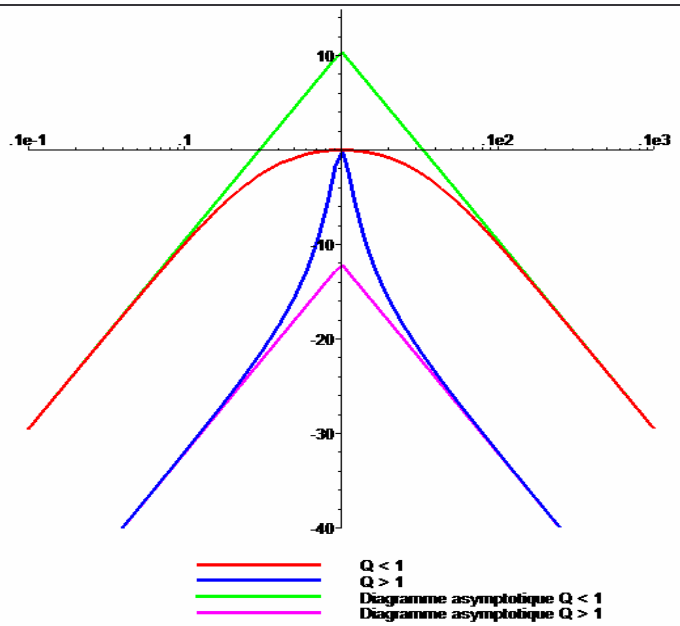
$$\begin{aligned}&\forall\omega : \varphi_0(\omega)=0 \\ &\omega \ll \omega_1 : \varphi_1(\omega)=0 \\ &\omega \gg \omega_1 : \varphi_1(\omega)=\frac{\pi}{2} \\ &\omega \ll \omega_2 : \varphi_2(\omega)=0 \\ &\omega \gg \omega_2 : \varphi_2(\omega)=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



La courbe noire finale est donc la somme des courbes rouge et bleue et pointillés.

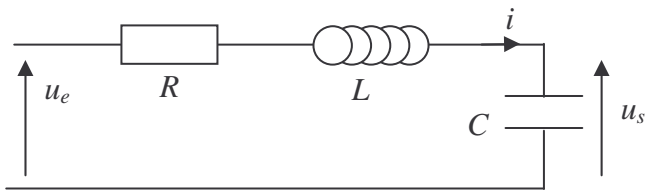
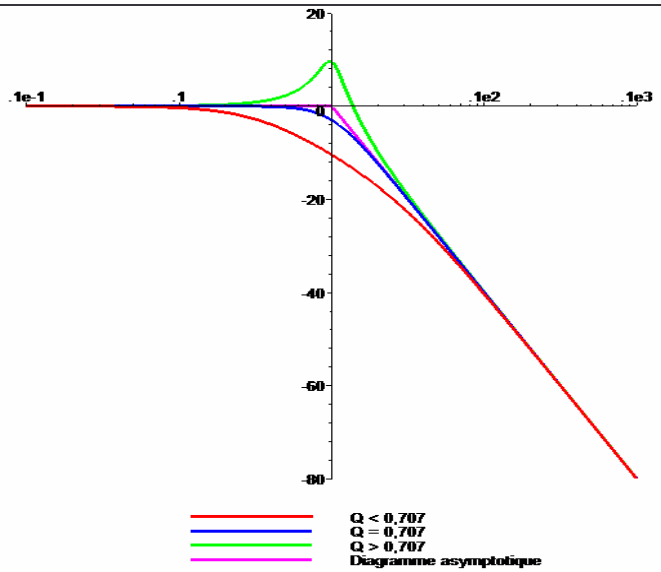
II.2. Filtres d'ordre 2

■ Filtre passe-bande

Exemple de circuit réalisant un tel filtre	
Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{L\omega}{R}-\dfrac{1}{RC\omega}\right)}$
Fonction de transfert $\underline{H}(jx)$	$\underline{H}(jx)=\dfrac{1}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$ avec $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $Q=\dfrac{1}{RC\omega_0}=\dfrac{L\omega_0}{R}$
Argument de $\underline{H}(jx)$	$\varphi(x)==-\arctan\left[Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]$
Pulsations de coupure	$x_{2C}=\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}$ et $x_{1C}=-\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}$
Bande passante	$\omega_{2C}-\omega_{1C}=(x_{2C}-x_{1C})\omega_0=\dfrac{\omega_0}{Q}$
Allure du diagramme de Bode du gain en dB en fonction de log x	
Forme générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_0}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}=\dfrac{H_0}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$

Remarque : on a en fait un circuit *RLC* série pour lequel on regarde la résonance en intensité.

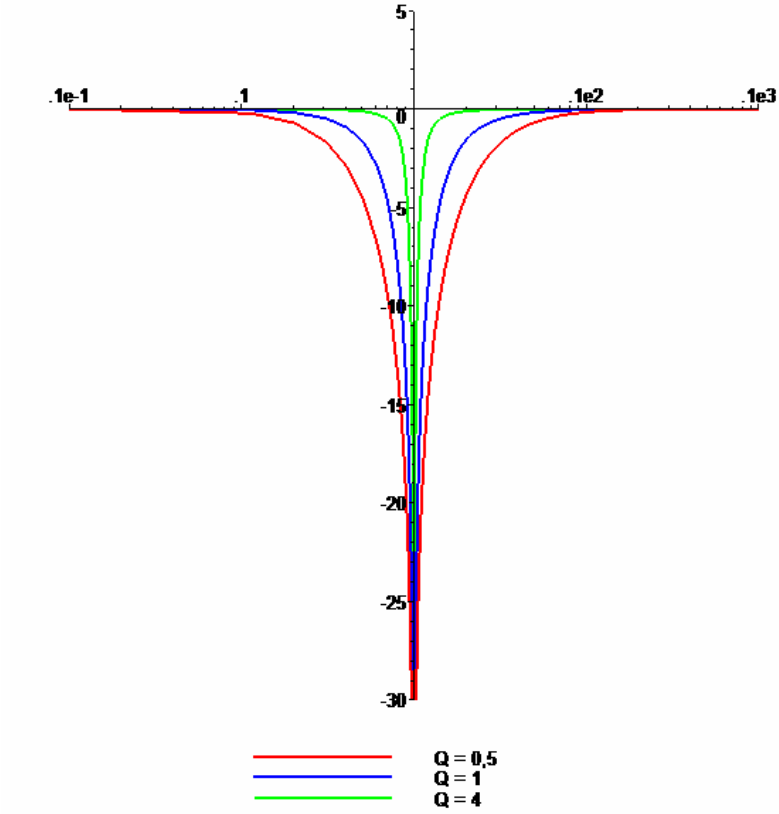
■ Filtre passe-bas d'ordre 2

Exemple de circuit réalisant un tel filtre	
Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$
Fonction de transfert $\underline{H}(jx)$	$\underline{H}(jx)=\dfrac{1}{1-x^2+j\dfrac{x}{Q}}$ avec $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $Q=\dfrac{1}{RC\omega_0}=\dfrac{L\omega_0}{R}$
Argument de $\underline{H}(jx)$	$\varphi(x)==-\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{Q(x^2-1)}{x}$
Variations de G_{dB}	$G_{\text{dB}}(x)$ présente un maximum en $x=\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$ si $Q>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors $G_{\text{dB,max}}=10\log\left(\dfrac{4Q^4}{4Q^2-1}\right)$. Si $Q<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors $G_{\text{dB}}(x)$ est strictement décroissante.
Allure du diagramme de Bode du gain en dB en fonction de log x	
Forme générale de la fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 2	$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_0}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}=\dfrac{H_0}{1-x^2+j\dfrac{x}{Q}}$

À noter ici, la pente à – 40 dB/déc dans la partie $x > 1$. Ce filtre est un meilleur filtre passe bas que son équivalent d'ordre 1 mais présente une amplification parasite pour $Q>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (due à la résonance en tension aux bornes du condensateur).

Remarque : on a en fait un circuit *RLC* série pour lequel on regarde la résonance en tension aux bornes du condensateur.

■ Filtre coupe bande (ou rejecteur)

On donne, à titre documentaire, la forme de la fonction de transfert d'un tel filtre ainsi que l'allure du diagramme de Bode du gain en dB pour un filtre coupe bande.

Fonction de transfert $\underline{H}(jx)$	$\underline{H}(jx)=\dfrac{jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}=1-\dfrac{1}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$
Allure du diagramme de Bode du gain en dB en fonction de log x